

تحلیل انتقال گرمای رسانشی به روش مونت کارلوی حجم محدود

فرشاد کوثری

استاد، دانشگاه تهران
fokowsari@ut.ac.ir

هومن نعیمی

استادیار، دانشگاه بجنورد
h.naeimi@ub.ac.ir

چکیده

در این پژوهش، روش مونت کارلوی حجم محدود برای حل معادله گرمای حالت پایدار سه بعدی معرفی می‌گردد که در آن به جای استفاده از طرح معمول گسسته‌سازی تفاضل محدود از طرح حجم محدود استفاده می‌شود. این روش برای تحلیل دو مساله کلاسیک مورد استفاده قرار می‌گیرد. مساله اول یک مکعب واحد بدون تولید گرما است که تمامی دیواره‌های آن به غیر دیواره سمت راست در دمای صفر قرار دارند. مساله دوم نیز یک مکعب با تولید گرمای حجمی یکنواخت در دمای صفر است. بررسی نتایج نشان داد که توزیع دمای حاصل از روش مونت کارلوی حجم محدود در هر دو مساله با نتایج تحلیلی انطباق کامل دارد. همچنین علی‌رغم این که انتظار می‌رفت برای رسیدن به دقت قابل قبول نیاز به بررسی تعداد بسیار زیادی ذره باشد، نشان داده شد که می‌توان با بررسی تعداد نسبتاً کمی ذره، ۳۰۰۰۰ ذره برای مساله اول و ۱۰۰۰۰ ذره برای مساله دوم، به دقت بسیار خوبی دست یافت و هم خطای نسبی و هم خطای نسبی جذر میانگین مربعات کمتر از ۱٪ محاسبه گردید.

کلمات کلیدی: مونت کارلو، حجم محدود، رسانش، انتقال گرما، معادله گرما.

۱- مقدمه

مدل‌سازی انتقال گرمای رسانشی از اهمیت قابل ملاحظه‌ای در بسیاری از کاربردهای مهندسی نظیر عایق‌های گرمایی چندلایه، مواد مرکب و مواد هدفمند برخوردار است [۱-۳]. متأسفانه اغلب کاربردهای عملی انتقال گرمای رسانشی دارای دشواری‌هایی از قبیل خواص ترموفیزیکی متغیر، هندسه سه بعدی با شکل مرز دلخواه و نیز شرایط مرزی پیچیده هستند. در نتیجه محاسبه حل تحلیلی اغلب مسایل رسانش گرمایی اگر که غیرممکن نباشد بسیار دشوار است. روش‌های عددی گوناگونی برای تحلیل مسایل رسانش گرمایی ارائه شده‌اند که از آن جمله می‌توان به روش حجم محدود [۴]، روش تفاضل محدود [۵]، روش اغتشاش تصادفی [۶] و روش انتگرالی لاپلاس [۷] اشاره نمود. این روش‌های عددی عمدتاً در مسایل ساده نظیر هندسه‌های ساده با خواص ترموفیزیکی ثابت به کار برده شده‌اند که دمای کل دامنه حل را به صورت هم‌زمان محاسبه می‌کنند. دو روش آخر خیلی سراسر نبوده و کدنویسی آن‌ها برای تحلیل عددی مسایل بسیار دشوار است.

روش مونت کارلو برای مدت زمان طولانی به عنوان یک ابزار قدرتمند در حل معادله گرما شناخته شده است. در ابتدای معرفی آن، رسیدن به دقت مناسب در روش مونت کارلو مستلزم صرف زمان بسیار طولانی در مقایسه با دیگر روش‌های عددی بود. اما در سال‌های اخیر به دلیل رشد چشمگیر سرعت پردازش، کاهش قیمت رایانه‌های سریع و افزایش ظرفیت ذخیره‌سازی اطلاعات، روش مونت کارلو از یک ابزار با هزینه محاسباتی بالا به یک روش مقرون به صرفه تبدیل شده است. روش مونت کارلو نخستین بار توسط حاجی-شیخ و اسپارو [۸] برای حل مسایل رسانش گرمایی به کار گرفته شد. کوثری و عربی [۹] با استفاده از تغییر مختصات مناسب، شکل بی بعد معادله گرما را به دست آورده و توزیع دما را برای یک جسم ناهمسانگرد دوبعدی با استفاده از شکل تفاضل محدود روش مونت کارلو محاسبه نمودند و نشان دادند که با انتخاب اندازه مناسب برای شبکه، کاهش قابل ملاحظه‌ای در زمان محاسباتی حاصل می‌گردد. گریگوریو [۱۰] یک روش مونت کارلو مبتنی بر فرایند ایتو را به منظور حل معادله گرمای گذرا و پایدار توسعه داد که هر دو نوع شرط مرزی نیومن و دیریکله را بدون نیاز به گسسته‌سازی دامنه حل پوشش

می‌داد. روش مونت کارلو توسط ونگ [۱۱] در شبیه‌سازی تبادل فونون در مقیاس نانو در داخل ساختارهای سیلیکونی به کار گرفته شد که در معرض گرمایی متفاوت قرار داشتند. در پژوهش مزبور نشان داده شد که در صورت در نظر گرفتن عبارت تولید گرمای خارجی در معادله گرما، ممکن است که توزیع دما کمتر از مقدار واقعی پیش‌بینی گردد. همچنین می‌توان به کاربرد روش مونت کارلو در مسایل رسانش گرمایی معکوس به منظور تخمین کمیت‌های مجهول بر مبنای تاریخچه شار گرمایی یا دماهای اندازه‌گیری شده اشاره نمود [۱۲-۱۳].

برای حل معادله گرما با استفاده از روش مونت کارلو لازم است که از یک روش گسسته‌سازی مناسب استفاده گردد. از میان تمامی تکنیک‌های گسسته‌سازی موجود، دو روش تفاضل محدود و حجم محدود پرکاربردترین آن‌ها به حساب می‌آیند. در تمامی مطالعات پیشین، روش تفاضل محدود توسط پژوهشگران برای تعیین شکل تصادفی معادله گرما برای حل توسط روش مونت کارلو به کار گرفته شده است. روش حجم محدود دارای دو مزیت نسبت به روش تفاضل محدود در هندسه‌های پیچیده است که استفاده از آن را در پژوهش حاضر توجیه‌پذیر می‌نماید. نخست این که این طرح ضامن برقراری بقای انرژی در هر سلول گسسته است و دوم این که در روش حجم محدود برای تحلیل شبکه نامنظم دیگر نیازی به تغییر مختصات نیست. اگرچه حل معادله گرما بسیار مورد مطالعه قرار گرفته و مقالات بسیاری در این خصوص موجود است اما اغلب آن‌ها محدود به مسایل ساده هستند که به میزان قابل توجهی تحلیل مساله را ساده می‌کنند [۱۴-۱۵]. هدف پژوهش حاضر، بررسی روش جدید مونت کارلوی حجم محدود برای حل معادله گرمای حالت پایدار بدون هرگونه محدودیت در هندسه، خواص فیزیکی و شرایط مرزی است. این روش انعطاف‌پذیری روش مونت کارلو را در تحلیل مسایل رسانش گرمایی افزایش می‌دهد و روش مونت کارلوی حجم محدود را به یک ابزار آماری قدرتمند تبدیل می‌کند که می‌تواند گستره وسیعی از کاربردهای صنعتی و عملی را پوشش دهد.

۲- توصیف روش

فرم کلی معادله دیفرانسیل انتقال گرمای رسانشی پایدار در یک جسم ساکن، همگن و ایزوتروپیک بدون در نظر گرفتن تولید گرما به صورت زیر است:

$$\nabla \cdot (k \nabla T) + g = 0 \quad (1)$$

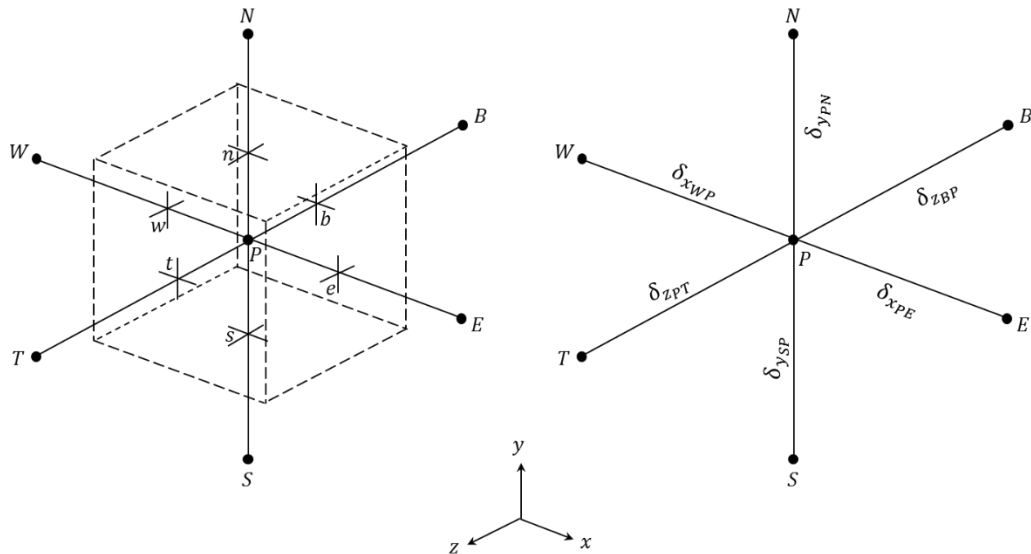
که در آن g نرخ تولید گرمای حجمی در جسم است. با انتگرال‌گیری از معادله (۱) روی یک حجم کنترل و سپس استفاده از قضیه گرین عبارت زیر برای معادله گرما حاصل می‌شود:

$$\int_A n \cdot (k \nabla T) dA + \int_{\Delta V} g dV = 0 \quad (2)$$

در روش حجم‌کنترلی این معادله انتگرالی به هر یک از سلول‌های شبکه محاسباتی اعمال می‌شود. برای سلول حجم‌کنترلی سه‌بعدی نشان داده شده در شکل ۱ با حذف انتگرال‌های سطحی رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$k_e A_e \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - k_w A_w \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w + k_n A_n \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - k_s A_s \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_s + k_t A_t \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_t - k_b A_b \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_b + \bar{g} \Delta V = 0 \quad (3)$$

که در آن \bar{g} تولید گرمای حجمی متوسط، A مساحت سطح متناظر از حجم کنترل و ΔV حجم است. همان‌گونه که در شکل ۱ نشان داده شده است، حجم کنترل حاوی نقطه P دارای شش گره همسایه در شرق، غرب، شمال، جنوب، بالا و پایین است که به ترتیب با حروف E, W, N, S, T, B نشان داده می‌شوند. همچنین نمادهای e, w, n, s, t, b و به ترتیب به دیوارهای شرقی، غربی، شمالی، جنوبی، بالایی و پایینی حجم کنترل مورد بررسی اشاره دارند. ضریب رسانش گرمایی در هر یک از این دیواره‌ها با میان‌بایی خطی مقادیر دو گره مجاور محاسبه می‌شود در حالی که گرادیان دما در هر دیواره



شکل ۱: نمایش حجم کنترل سه‌بعدی و آرایش نقاط همسایه

به صورت تفاضل مرکزی دمای دو گره مجاور تعریف می‌گردد. بنابراین شکل حجم کنترلی معادله گرما برای نقطه داخلی نشان داده شده در شکل ۱ با رابطه زیر بیان می‌گردد:

$$a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + a_T T_T + a_B T_B + \bar{g} \Delta V = a_P T_P \quad (4)$$

که در آن:

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B \quad (5)$$

ضرایب معادله گرمای گسسته‌شده حجم کنترلی (۵) در جدول ۱ ارایه شده‌اند.

جدول ۱: ضرایب معادله گرمای گسسته برای گره داخلی P

a_E	a_W	a_N	a_S	a_T	a_B
$\frac{k_e A_e}{\delta x_{PE}}$	$\frac{k_w A_w}{\delta x_{WP}}$	$\frac{k_n A_n}{\delta y_{PN}}$	$\frac{k_s A_s}{\delta y_{SP}}$	$\frac{k_t A_t}{\delta z_{PT}}$	$\frac{k_b A_b}{\delta z_{BP}}$

معادله (4) را می‌توان با تقسیم طرفین بر a_P به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$T_P = F_E T_E + F_W T_W + F_N T_N + F_S T_S + F_T T_T + F_B T_B + S \quad (6)$$

ضرایب بی‌بعد و جمله منبع استفاده شده در معادله (۶) در جدول ۲ معرفی گردیده‌اند.

جدول ۲: ضرایب بی‌بعد معادله (۶)

F_E	F_W	F_N	F_S	F_T	F_B	S
$\frac{a_E}{a_P}$	$\frac{a_W}{a_P}$	$\frac{a_N}{a_P}$	$\frac{a_S}{a_P}$	$\frac{a_T}{a_P}$	$\frac{a_B}{a_P}$	$\frac{1}{a_P} \bar{g} \Delta V$

با نگاهی به جدول ۲ به وضوح می‌توان دید که مجموع تمامی ضرایب بی‌بعد برابر با واحد است. توصیف احتمالی معادله (۶) بدین صورت قابل بیان است که اگر حرکت تصادفی یک ذره را که در نقطه P قرار دارد در نظر بگیریم احتمال حرکت ذره به هر یک از گره‌های E, N, W, T, S, B به ترتیب برابر با $F_E, F_N, F_W, F_S, F_T, F_B$ خواهد بود. در روش مونت کارلوی

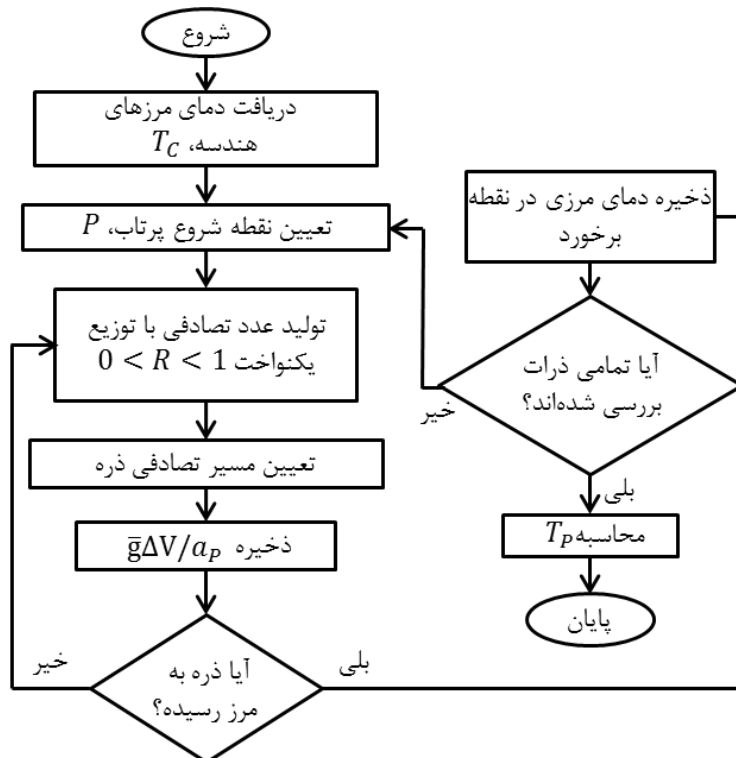
حجم محدود برای تعیین جهت حرکت ذره به سمت هر یک از شش گره مجاور ابتدا باید یک عدد تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه (0 و 1) تولید کرده و سپس با توجه به شرایط زیر جهت حرکت تصادفی ذره را تعیین نمود:

$$\begin{aligned}
 P \rightarrow E & \text{ اگر } 0 < R < F_E \\
 P \rightarrow W & \text{ اگر } F_E < R < F_E + F_W \\
 P \rightarrow N & \text{ اگر } F_E + F_W < R < F_E + F_W + F_N \\
 P \rightarrow S & \text{ اگر } F_E + F_W + F_N < R < F_E + F_W + F_N + F_S \\
 P \rightarrow T & \text{ اگر } F_E + F_W + F_N + F_S < R < F_E + F_W + F_N + F_S + F_T \\
 P \rightarrow B & \text{ اگر } F_E + F_W + F_N + F_S + F_T < R < 1
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

برای محاسبه دمای گره P ، یک ذره به صورت تصادفی حرکت خود را از گره مزبور به سمت یکی از شش گره مجاور شروع می‌کند. این ذره شبکه محاسباتی را به صورت گره‌به‌گره در یک روند کاملاً تصادفی طی می‌کند تا در نهایت به یکی از مرزهای هندسه برسد و در این هنگام حرکت ذره متوقف می‌گردد. هنگامی که ذره به یکی از مرزها می‌رسد، دمای مشخص مرز در نقطه برخورد ذخیره می‌شود که این دما با T_C نشان داده می‌شود. اگر $T_C(1)$ دمای مرزی مربوط به خاتمه اولین حرکت ذره از نقطه P ، $T_C(2)$ دمای مرزی در پایان دومین حرکت ذره و به همین صورت $T_C(N)$ دمای مرزی در پایان N امین حرکت ذره از نقطه P باشد، دمای نقطه P از رابطه (۸) محاسبه می‌شود. در حالتی که تولید گرمای حجمی نیز در داخل جسم وجود داشته باشد مقدار عبارت $\frac{\Delta V}{a_P} \bar{g}$ در هر مرحله از حرکت تصادفی ذره باید ذخیره گردد.

$$T_P = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_C(i) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i-1} \frac{\Delta V}{a_P} \bar{g}(x_j, y_j, z_j)
 \tag{8}$$

که در آن N تعداد کل حرکت‌های تصادفی صورت گرفته از نقطه P و m_i تعداد کل مراحل طی شده توسط ذره i ام از نقطه P تا رسیدن به مرز هندسه است. روند تکراری روش مونت کارلوی حجم محدود در فلوجارت شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲: فلوجارت روش مونت کارلوی حجم محدود

مزیت اصلی روش مونت کارلوی حجم محدود در مسایل دارای شبکه نامنظم است. در این روش دیگر نیازی نیست که ضریب رسانش گرمایی ماده مشتق‌پذیر باشد و می‌توان با استفاده از این روش مواد چندلایه را نیز بررسی نمود. در مسایل با شرایط مرزی نوع دوم و سوم دیگر نیازی به محاسبه گرادیان دما در مرزها نیست و همچنین به دست آوردن فرمولاسیون روش مونت کارلوی حجم محدود به راحتی با استفاده از روش موازنه انرژی امکان‌پذیر است.

3- نتایج

در این بخش عملکرد روش مونت کارلوی حجم محدود در مسایل انتقال گرمای رسانشی سه‌بعدی پایدار مورد ارزیابی قرار می‌گیرد که حل تحلیلی آن‌ها موجود است.

3-1- مساله آزمون اول: مکعب واحد بدون تولید گرما

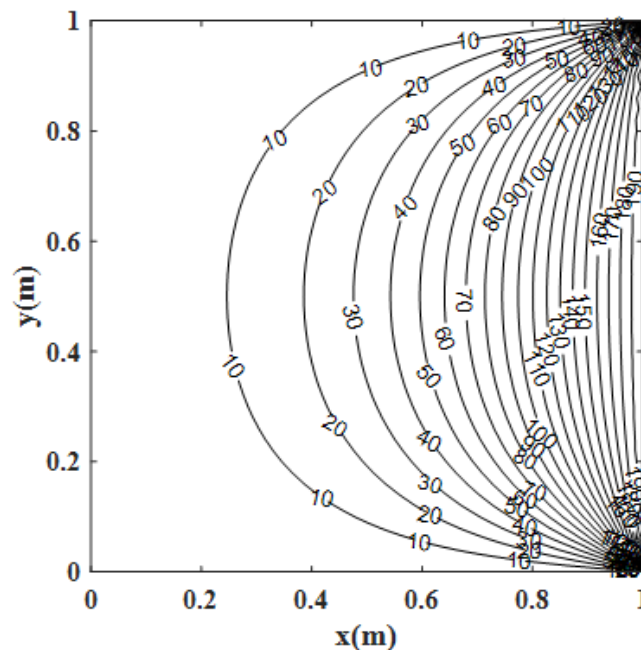
در ابتدا یک مکعب واحد با ضریب رسانش گرمایی ثابت $k = 1 \text{ W/mK}$ را در نظر بگیرید که فاقد تولید گرماست. دیواره سمت راست این مکعب در دمای $T_a = 200^\circ\text{C}$ قرار داشته و دمای دیگر سطوح مکعب صفر در نظر گرفته شده است. صحنه‌گذاری روش مونت کارلوی حجم محدود از طریق مقایسه دمای پیش‌بینی شده توسط این روش با دمای محاسبه شده توسط فرمول تحلیلی ارائه شده کارسلو و جگر [۵] انجام می‌شود:

$$T(x, y, z) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{T_a \sinh lx \sin \frac{(2n+1)\pi y}{b} \sin \frac{(2p+1)\pi z}{c}}{(2n+1)(2p+1) \sinh la} \quad (9)$$

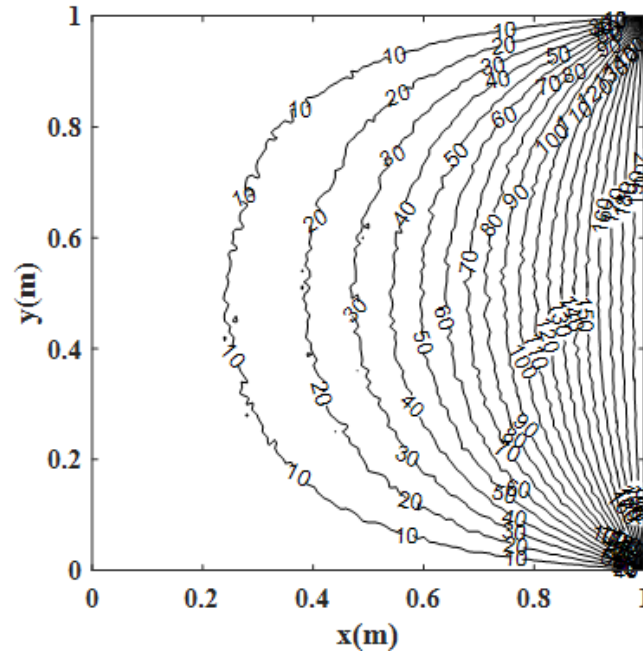
که در آن a ، b و c به ترتیب طول، عرض و ارتفاع مکعب مستطیل هستند و

$$l^2 = \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{b^2} + \frac{(2p+1)^2 \pi^2}{c^2}, \text{ with } (n, p) = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

به منظور درک بهتر دقت روش مونت کارلوی حجم محدود، توزیع دمای پیش‌بینی شده توسط این روش در صفحه میانی مکعب ($z = 0.5m$) با توزیع دمای حاصل از فرمول (۹) به ازای 10^5 حرکت تصادفی برای هر نقطه به ترتیب در شکل‌های ۳-الف و ۳-ب مقایسه شده است. با توجه به دو شکل ۳-الف و ۳-ب بدیهی است که دماهای پیش‌بینی شده توسط روش مونت کارلوی حجم محدود انطباق کامل با نتایج به دست آمده از معادله (۹) دارند.



شکل ۳-الف: کانتور دمای حاصل از حل تحلیلی بر روی صفحه میانی مکعب مساله آزمون اول

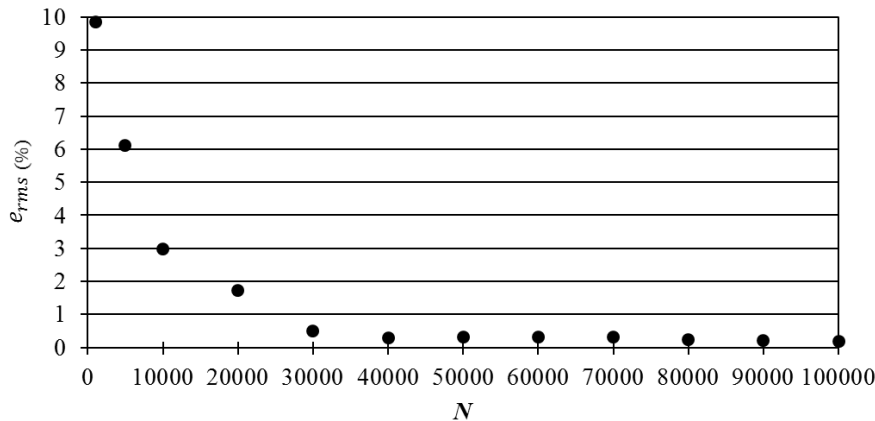


شکل ۳-ب: کانتور دمای حاصل از روش مونت کارلوی حجم محدود بر روی صفحه میانی مکعب مساله آزمون اول

با محاسبه خطای نسبی جذر میانگین مربعات، e_{rms} ، بر حسب تعداد کل حرکات تصادفی درک بهتری از دقت نتایج روش مونت کارلوی حجم محدود به دست می‌آید. خطای نسبی جذر میانگین مربعات بیانگر اختلاف بین نتایج تحلیلی و تقریبی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_{rms} = \sqrt{\frac{1}{n_x} \sum_{i=1}^{n_x} \left(\frac{T_{i,FVMC} - T_{i,anal}}{T_{i,anal}} \times 100 \right)^2} \quad (11)$$

که در آن $T_{i,FVMC}$ دمای تخمینی از روش مونت کارلوی حجم محدود در گره i ام، $T_{i,anal}$ دمای تحلیلی محاسبه شده توسط معادله (۹) در همان گره و n_x نیز تعداد فواصل در طول محور x بر روی صفحه $Z = 0/5m$ است. خطای نسبی جذر میانگین مربعات نتایج روش مونت کارلوی حجم محدود به ازای مقادیر گوناگون حرکات تصادفی، N ، در شکل ۴ ترسیم شده است. مهم‌ترین ویژگی این نمودار روند به شدت کاهش e_{rms} با افزایش N در ابتدای نمودار است که بیانگر این موضوع است که به ازای تعداد نسبتاً کمی از حرکات تصادفی ذره، می‌توان به دقت قابل قبولی در نتایج روش مونت کارلوی حجم محدود رسید. این مقدار برای مساله مورد بررسی در این بخش در حدود ۳۰۰۰۰ حرکت تصادفی تعیین گردید در حالی که مقدار e_{rms} روش مونت کارلوی حجم محدود در این مقدار کمتر از ۰.۱٪ بود.



شکل ۴: محاسبه شده برای نتایج مونت کارلوی حجم محدود در مساله آزمون اول

3-1- مساله آزمون دوم: جعبه با تولید گرمای یکنواخت

کاربردهای عملی گوناگونی از جاگذاری منبع گرما در دامنه حل وجود دارد که از آن جمله می‌توان به گرم‌کن‌های برقی، منابع انرژی هسته‌ای و منابع انرژی شیمیایی اشاره نمود. این‌گونه مسایل را نیز می‌توان به کمک روش مونت کارلوی حجم محدود تحلیل نمود. در این بخش یک جعبه به شکل مکعب مستطیل با تولید گرمای یکنواخت و ضریب رسانش گرمایی ثابت مورد بررسی قرار می‌گیرد که دمای تمامی سطوح آن صفر است. توزیع دمای حالت پایدار در داخل این هندسه توسط هان و اوزیشیک [۱۵] به صورت زیر به دست آمد:

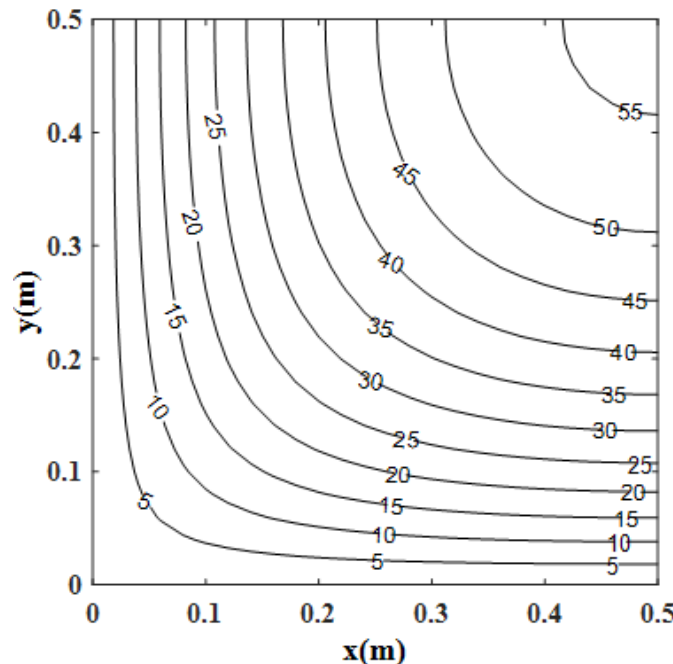
$$T_{ss}(x, y, z) = \frac{64}{abc} \frac{g_0}{k} \sum_{m \text{ odd}}^{\infty} \sum_{n \text{ odd}}^{\infty} \sum_{p \text{ odd}}^{\infty} \frac{1}{\eta_p \gamma_n \beta_m (\beta_m^2 + \gamma_n^2 + \eta_p^2)} \sin \beta_m x \sin \gamma_n y \sin \eta_p z \quad (12)$$

که در آن تولید گرمای حجمی یکنواخت، k ضریب رسانش گرمایی و a ، b و c به ترتیب طول، عرض و ارتفاع جعبه هستند. مقادیر ویژه β_m ، γ_n و η_p توسط روابط زیر تعریف می‌گردند:

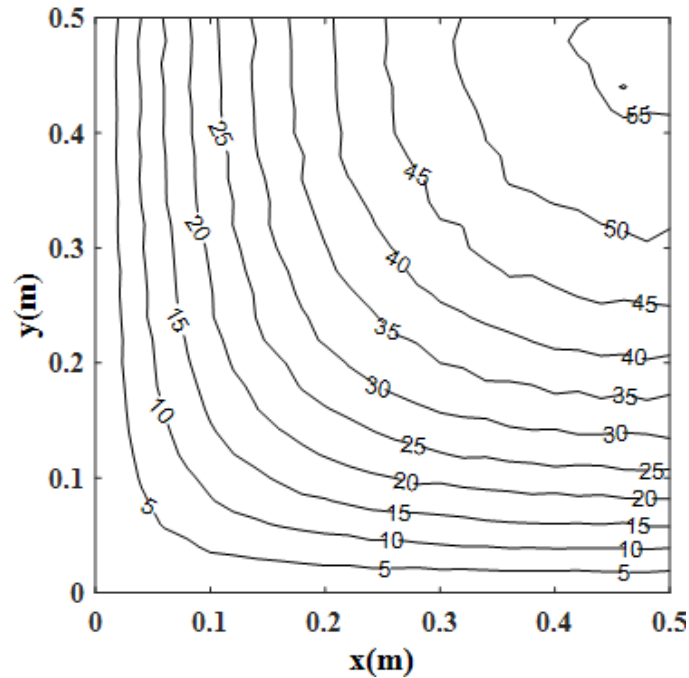
$$\beta_m = \frac{m\pi}{a}, \gamma_n = \frac{n\pi}{b}, \eta_p = \frac{p\pi}{c}, \text{ with } (m, n, p) = 1, 3, 5, \dots \quad (13)$$

میدان دما به شکل خطوط هم‌دما برای هندسه مورد بررسی با استفاده از روش مونت کارلوی حجم محدود بر روی صفحه میانی هندسه ($z = 0/5m$) تخمین زده شده و به همراه کانتورهای دمای حاصل از فرمول تحلیلی (۱۲) در شکل ۵ ترسیم گردیده است. مجدداً به منظور سادگی در این بخش نیز از یک مکعب واحد با $g_0 = 1000 \text{ W/m}^3$ و $k = 1 \text{ W/mK}$ استفاده گردیده است. با مقایسه شکل‌های ۵-الف و ۵-ب به وضوح می‌توان دید که نتایج پیش‌بینی شده توسط روش مونت کارلوی حجم محدود تطابق بسیار خوبی با داده‌های حاصل از حل تحلیلی دارند.

در ادامه بررسی دقت روش مونت کارلو، به مطالعه میزان تاثیر تعداد ذرات بر دقت نتایج خواهیم پرداخت. در این بخش تعداد گوناگونی از ذرات به منظور تخمین دمای مرکز مکعب مورد نظر استفاده قرار گرفته و نتایج به دست آمده بر حسب تعداد ذرات در جدول ۳ ارائه شده است. به منظور حذف پراکنش نتایج روش مونت کارلوی حجم محدود، برای هر N به تعداد ۱۰ بار نتایج محاسبه و انحراف معیار مربوطه محاسبه و در جدول ۳ درج گردیده است. مقدار دما در مرکز مکعب از فرمول (12) برابر با $56/211^\circ\text{C}$ است. به وضوح می‌توان دید که به ازای تعداد ذرات بیشتر از ۱۰۰۰۰ ذره انطباق خوبی بین مقدار دقیق و مقادیر تخمینی از روش مونت کارلو وجود داشته و خطای نسبی و انحراف معیار هر دو کمتر از ۱٪ می‌باشند.



شکل ۵-الف: کانتور دمای حاصل از حل تحلیلی بر روی صفحه میانی مکعب مساله آزمون دوم



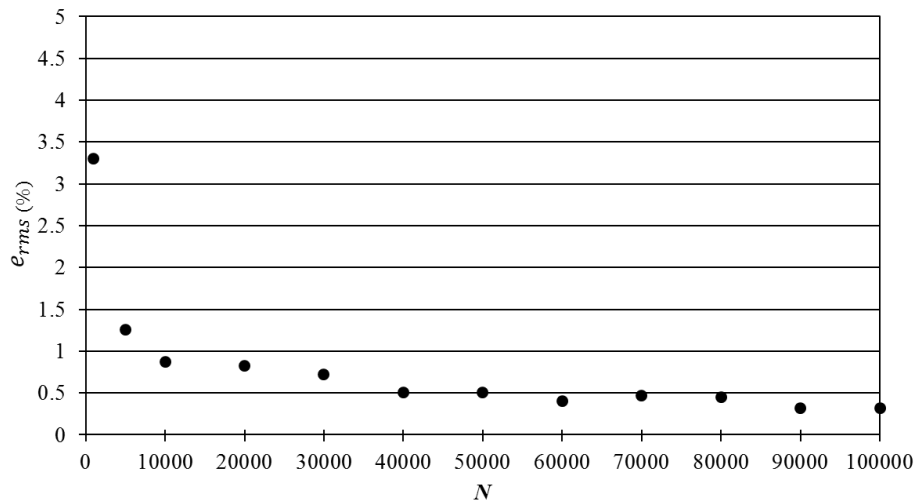
شکل ۵-ب: کانتور دمای حاصل از روش مونت کارلوی حجم محدود بر روی صفحه میانی مکعب مساله آزمون دوم

جدول ۳: خطای نسبی و انحراف معیار نتایج روش مونت کارلوی حجم محدود در مرکز مساله آزمون دوم بر حسب N

انحراف معیار	خطای نسبی (درصد)	FVMC	N
۲/۸۹۵	۱/۷۵۳	۵۵/۲۶	۱۰۰
۰/۷۷۵	۱/۶۲۸	۵۵/۲۹۷	۵۰۰
۱/۱۲۰	۰/۵۰۸	۵۵/۹۲۶	۱۰۰۰
۰/۶۰۸	۰/۰۵۱	۵۶/۲۴۱	۵۰۰۰
۰/۴۰۵	۰/۱۷۴	۵۶/۱۱۴	۱۰۰۰۰
۰/۱۱۷	۰/۰۱۴	۵۶/۲۰۴	۵۰۰۰۰
۰/۱۲۸	۰/۰۰۳	۵۶/۲۱۳	۱۰۰۰۰۰
۰/۰۳۸	۰/۰۹۱	۵۶/۱۶۱	۵۰۰۰۰۰

دقت و صحت نتایج روش مونت کارلو بر روی صفحه میانی مکعب مساله آزمون دوم یعنی صفحه $Z = 0/5m$ با محاسبه خطای نسبی جذر میانگین مربعات مورد ارزیابی قرار گرفته و نتایج در شکل 6 نمایش داده شده‌اند. با توجه به شکل می‌توان گفت که e_{rms} با افزایش تعداد ذرات تصادفی به سرعت کاهش یافته و مقدار e_{rms} برای نتایج پیش‌بینی شده توسط روش مونت کارلو به ازای تعداد ۱۰۰۰۰ ذره و بیشتر کمتر از ۱٪ است.

علت پایین‌تر بودن مقدار e_{rms} در این مساله در مقایسه با مساله آزمون اول به ناپیوستگی دما بر روی دیواره‌های راست و چپ هندسه مساله اول ارتباط دارد که محاسبه دقیق دما را در نزدیکی این مرزها چه به صورت عددی و چه به صورت تحلیلی دشوار می‌سازد.



شکل 6: محاسبه شده برای نتایج مونت کارلوی حجم محدود در مساله آزمون دوم

۳- نتیجه گیری

در این پژوهش، روش مونت کارلوی حجم محدود برای حل معادله گرما در حالت کلی معرفی گردید. بر مبنای نتایج حاصل از تحلیل دو مساله آزمون بررسی شده در این پژوهش نتایج زیر به دست آمدند:

- روش مونت کارلوی حجم محدود در پیش‌بینی توزیع دما در مسایل آزمون مورد بررسی در مقایسه با نتایج تحلیلی عملکرد بسیار مناسبی داشت.
 - علیرغم وابستگی دقت روش مونت کارلوی حجم محدود به تعداد ذرات مورد بررسی از دیدگاه تئوری، نشان داده شد که پس از بررسی به ترتیب ۳۰۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ ذره در مسایل آزمون اول و دوم خطای نسبی و خطای نسبی جذر میانگین مربعات کمتر از ۱٪ بود. بنابراین به ازای بررسی تعداد نسبتاً کمی از ذرات، دقت قابل قبولی در روش پیشنهادی قابل دستیابی است.
 - روش مونت کارلوی حجم محدود کاملاً مناسب مسایلی است که نیاز به محاسبه مستقیم دما در یک یا چند نقطه دلخواه باشد بدون آن که محاسبات برای تمام دامنه حل انجام شود. همچنین به دلیل برقراری قانون بقای انرژی می‌توان از این روش در شبکه نامنظم نیز استفاده نمود بدون آن که نیاز به تغییر مختصات باشد.
 - به کارگیری روش مونت کارلوی حجم محدود بسیار آسان است و این روش متکی بر عملیات بسیار سنگین ریاضی نبوده و نیازی به تخصص ویژه ندارد. برخلاف سایر روش‌های متداول حل نظیر روش تفاضل محدود، کد رایانه‌ای روش مونت کارلوی حجم محدود نیاز به فضای ذخیره‌سازی زیاد حتی در مسایل سه‌بعدی ندارد.
- این پژوهش به وضوح نشان داد که روش مونت کارلوی حجم محدود قابلیت پیش‌بینی دقیق و قابل اعتماد دما را در مسایل رسانش گرمایی دارد. در حالت کلی تری که ضریب رسانش گرمایی یا تولید گرمای حجمی متغیر باشد روش مونت کارلوی حجم محدود بدون نیاز به تغییر در شکل گسسته معادله گرما و به سادگی قابل استفاده خواهد بود هر چند که به منظور تمرکز بر روی خود روش، در این پژوهش بدین موارد پرداخته نشد. همچنین این روش بسیار مناسب برای مسایل رسانش گرمایی معکوس خواهد بود که به تخمین خواص مجهول ماده به منظور دستیابی به شار گرما یا توزیع دمای مطلوب می‌پردازند.

مراجع

- [1] Norouzi, M., Rahmani, H., Birjandi, A.K. and Joneidi, A.A., 2016. "A general exact analytical solution for anisotropic non-axisymmetric heat conduction in composite cylindrical shells". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 93, pp. 41–56.
- [2] Gallegos-Muñoz, A., Violante-Cruz, C., Balderas, B.J.A., Rangel-Hernandez, V.H. and Belman-Flores, J.M. 2010. "Analysis of the conjugate heat transfer in a multi-layer wall including an air layer", *Applied Thermal Engineering*, 30, pp. 599–604.
- [3] Noda, N. 1999. "Thermal stresses in functionally Graded materials", *Journal of Thermal Stresses*, 22(4-5), pp. 477-512.
- [4] Patankar, S.V., 1980. *Numerical heat transfer and fluid flow*, Hemisphere Publishing Corporation.
- [5] Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., 1986. *Conduction of Heat in Solids*, Oxford Science Publications.
- [6] Wu, F. and Zhong, W.X., 2016. "A modified stochastic perturbation method for stochastic hyperbolic heat conduction problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 305, pp. 739-758.
- [7] Loureiro, F.S., Mansur, W.J. and Vasconcellos, C.A.B., 2009. "A hybrid time/Laplace integration method based on numerical Green's functions in conduction heat transfer", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198, pp. 2662–2672.
- [8] Haji-Sheikh, A. and Sparrow, E.M., 1967. "The Solution of Heat Conduction Problems by Probability Methods", *Journal of Heat Transfer, Transaction of ASME*, pp. 121-130.
- [9] Kowsary, F. and Arabi, M., 1999. "Monte Carlo solution of anisotropic heat conduction", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 26(8), pp. 1163-1173.
- [10] Grigoriu, M., 2000. "A Monte Carlo solution of heat conduction and Poisson equations", *Journal of Heat Transfer, Transaction of ASME*, 122, pp. 40-45.
- [11] Wong, B.T., Francoeur, M. and Pinar Mengüç, M., 2011. "A Monte Carlo simulation for phonon transport within silicon structures at nanoscales with heat generation", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 54, pp. 1825–1838.
- [12] Haji-Sheikh, A. and Buckingham, F.P., 1993. "Multidimensional inverse heat conduction using the Monte Carlo method", *Journal of Heat Transfer, Transaction of ASME*, 115, pp. 26-33.
- [13] Woodbury, K.A. and Beck, J.V., 2013. "Estimation metrics and optimal regularization in a Tikhonov digital filter for the inverse heat conduction problem", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 62, pp. 31–39.
- [14] Ohmichi, M., Noda, N. and Sumi, N., 2017. "Plane heat conduction problems in functionally graded orthotropic materials", *Journal of Thermal Stresses*, 40(6), pp. 747-764.
- [15] Hahn, D.W. and Necati Özişik, M., 2012. *Heat conduction*, 3rd ed., John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey.