

بررسی امواج ایستاده ناشی از ارتعاش عمودی روی سطح آب پوشیده شده با لایه

نازک کشسان

لیلا بهمنی

دکترای فیزیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی در علوم پایه زنجان
lbahmani@iasbs.ac.ir

وحیده سرداری

دانشجوی دکترای فیزیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی در علوم پایه
زنجان
v.sardari@iasbs.ac.ir

مانیا ملکی

استادیار فیزیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی در علوم پایه زنجان
m_maleki@iasbs.ac.ir

چکیده

در این مقاله ایجاد امواج سطحی در یک ظرف پر از سیال، که به وسیله یک لایه کشسان شناور پوشیده شده‌است، به‌طور تئوری و تجربی بررسی شد. با اعمال جابجایی‌های تناوبی در امتداد قائم به ظرف، امواج ایستاده روی سطح سیال ایجاد شد. امواج ایجاد شده طرح‌هایی با تقارن‌های مختلف در سطح سیال تشکیل دادند. دامنه آستانه این امواج با استفاده از تکنیک ماره اندازه‌گیری شد. عدد موج و نرخ تضعیف این امواج، به صورت تابعی از بسامدهای اعمالی اندازه‌گیری شده‌است. برای بررسی تئوری مسئله از روش جان مایلز، که بر پایه استفاده از اصل وردش و هامیلتونی استوار است، استفاده شد. در نهایت توافق خوبی میان نتایج تئوری و تجربی مشاهده شد.

۱- مقدمه

تولید امواج سطحی بر روی یک لایه سیال، از طریق نوسان عمودی ظرف حاوی سیال، برای اولین بار توسط مایکل فارادی در سال ۱۸۳۱ گزارش شده‌است [1]. وی همچنین بیان کرد که این امواج با نصف بسامد اعمالی نوسان می‌کنند. آزمایش‌های لرد ریلی (۱۸۸۱) یافته‌های فارادی را تأیید کرد. اولین تحلیل پایداری خطی مربوط به نوسان عمودی یک لایه سیال غیروشکسان توسط بنجامین و ارسل (۱۹۵۴) انجام شد، که نشان دادند دامنه یک ویژه‌مد از معادله ماتریو تبعیت می‌کند [2]. تحلیل پایداری خطی برای یک سیال وشکسان با عمق محدود توسط کومار و تاکرمن (۱۹۹۴) ارائه شده‌است [3]. جان مایلز به منظور وارد کردن اثرات تضعیف در معادله دامنه آستانه از روش لاگرانژی استفاده کرد [4-6]. به ازای یک مقدار بحرانی از دامنه تحریک، سطح تخت سیال ناپایدار شده، طرحی از امواج ایستاده شکل می‌گیرد. طرح‌های ایده‌آل تنها در سیستم‌هایی که به اندازه‌ی کافی نزدیک آستانه ناپایداری هستند، مشاهده می‌شوند. هرچه پارامتر کنترل سیستم را بیشتر تغییر دهیم طرح‌های ایده‌آل ناپایدار شده، به حالت آشوبناک فضا-زمان منتقل می‌شود. ما در این مقاله روی سیستم‌هایی با نسبت ابعادی بزرگ متمرکز شده و دامنه آستانه ارتعاش برای تشکیل امواج فارادی را، زمانی که یک لایه جامد کشسان شناور سطح سیال را می‌پوشاند، به طریق تئوری و تجربی بررسی کردیم. از روش جان مایلز برای تحلیل تئوری سیستم و از تکنیک ماره برای اندازه‌گیری دامنه آستانه استفاده شده‌است. به‌طور کلی در سیستم مرزهای جانبی باعث دو اثر می‌شوند: کوانتتس بردار موج و یک پخش اضافی به واسطه لایه مرزی استوکس. به دلیل کوچک بودن دامنه آستانه و به منظور تعیین دقیق آن، از روش تکنیک ماره برای اندازه‌گیری دامنه آستانه ارتعاش برای تشکیل امواج فارادی استفاده شد.

۱- تئوری سیستم

ما برای بررسی تئوری سیستم از روش جان مایلز استفاده کردیم. او برای حل مسئله امواج گرانشی مربوط به یک مایع غیروشکسان، غیرچرخشی با چگالی ρ را که در یک ظرف صلب استوانه‌ای محدود شده‌است، با یک سطح مقطع بر روی این

مایع که در ارتفاع d از کف ظرف آرام و ساکن می‌باشد را مورد بررسی قرار داده است. $y = \eta(x, t)$ معادله سطح آزاد سیال و $y = -d$ مربوط به کف ظرف و $\varphi(x, y, t)$ پتانسیل سرعت نسبی می‌باشد ($\nabla\varphi$ سرعت مایع نسبت به ظرف می‌باشد). او با استفاده از اصل وردشی و مسئله مقدار مرزی جنبشی، لاگرانژی سیستم را تشکیل داده و معادلات حرکت و دامنه آستانه را به دست آورد. ما نیز در این مقاله از این روش برای به دست آوردن دامنه آستانه ارتعاشی برای تشکیل این امواج، زمانی که سطح سیال به طور کامل به وسیله‌ی یک لایه کشسان جامد پوشیده می‌شود، استفاده کردیم. به طوریکه جابجایی سطح آزاد را نسبت به سطح ترازوی که همراه با ظرف سیال حرکت می‌کند به شکل زیر بسط دادیم،

$$\eta(x, t) = \eta_n(t)\psi_n(x) \quad (x \text{ in } s) \quad (1)$$

که $\eta_n(t)$ مختصات تعمیم یافته و $\psi_n(x)$ ویژه توابعی (مدهای نرمال در تقریب خطی) هستند که در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$n \cdot \nabla\psi = 0 \quad (on \ \partial s) \quad (2)$$

$$\iint \psi_m \psi_n \, dS = \delta_{mn} S \quad (3)$$

$$(\nabla^2 + k_n)\psi = 0 \quad (4)$$

اگر جابجایی سیستم را به شکل (۵) بیان کنیم، با تشکیل لاگرانژی (۶) سیستم خواهیم داشت:

$$Z_0 = a_0 \cos 2\omega t \quad (5)$$

$$L = \frac{1}{\rho S} (T - V) = \left(\frac{1}{2} a_{mn} + \frac{\sigma}{2\rho} b_{mn} + \frac{\sigma}{4\rho} r_{mn} \eta_j \eta_l \right) \dot{\eta}_j \dot{\eta}_l - \frac{1}{2} \left[\delta_{mn} (g + z_0) + \frac{Kk_n^4}{\rho} \right] \eta_m \eta_n \quad (6)$$

در نهایت با به دست آوردن متوسط زمانی لاگرانژی در بازه‌ی $(0, 2\pi)$ بر حسب ωt و استفاده از اصل هامیلتونی، دامنه آستانه به شکل زیر به دست آمد:

$$a_0 = \frac{1}{2k_1 \tanh k_1 d} \left\{ 4\delta^2 + \left[\frac{\left(1 + \frac{\sigma k_1}{\rho \tanh k_1 d} (1 + (\tanh k_1 d)^2) \right) \omega^2 - \omega_1^2}{\omega_1^2} - \frac{Kk_1^4}{\rho g} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

در رابطه فوق ω_1 بسامد طبیعی اولین مد تحریک شده، k_1 عدد موج متناظر با آن مد، d ارتفاع سیال، ρ چگالی حجمی سیال، σ چگالی سطحی لایه کشسان، δ ضریب میرایی و K ضریب خمشی لایه کشسان را نشان می‌دهند. به همین ترتیب با استفاده از لاگرانژی سیستم رابطه پخش مربوط به امواج سطحی را در حضور لایه جامد کشسان به شکل زیر به دست آوردیم:

$$\omega'_{nm} = (1 - \delta)\omega_{nm} = (1 - \delta) \left\{ \frac{k(1 + e^{2kH})^2 \left[g + \frac{Kk^4}{\rho} + \frac{\lambda k^2}{\rho} \right]}{(e^{4kH} - 1) + \frac{2\sigma K}{\rho} (e^{4kH} + 1)} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

که در روابط فوق ω_{nm} بسامد طبیعی حالت غیروشکسان مربوط به مد (n, m) و k_{nm} عدد موج متناظر با آن و ω'_{nm} بسامد وشکسان می‌باشند. d و H ارتفاع سیال، ρ چگالی حجمی سیال، σ چگالی سطحی لایه کشسان، K ضریب خمشی لایه کشسان، k_1 عدد موج اولین مد تحریک شده و λ ضریب لاگرانژی را نمایش می‌دهند

۲- کارهای آزمایشگاهی

در این بخش از مقاله کارهای تجربی انجام شده برای بررسی امواج فارادی و نتایج حاصل از آن‌ها بیان می‌شود. برای بررسی پارامترهای مربوط به امواج فارادی ابتدا باید این امواج را در آزمایشگاه ایجاد کرد. بنابراین در ابتدا چگونگی ایجاد این امواج را شرح داده و سپس آزمایش‌هایی که برای اندازه‌گیری ضریب کشسان، نرخ میرایی امواج، عدد موج و دامنه آستانه لازم برای تشکیل امواج فارادی بر روی سطح آب پوشیده شده توسط لایه کشسان، اشاره می‌شود.

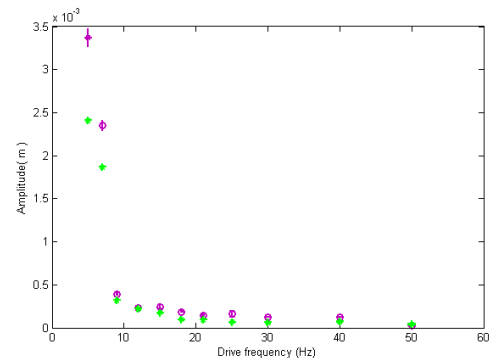
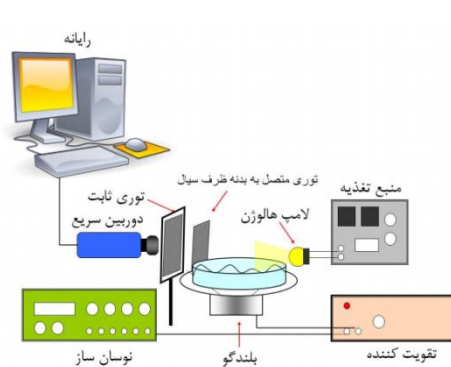
۲-۱- تشکیل امواج فارادی و اندازه‌گیری دامنه آستانه

در آزمایش گزارش شده از یک نوسان‌ساز *ESCORT* مدل *EGC-3238A* برای ایجاد نوسان سینوسی استفاده شده است. خروجی این نوسان‌ساز به تقویت‌کننده‌ای داده شده و نوسان تقویت شده باعث نوسان یک بلندگو شد. ظرف مستطیلی در ابعاد $14/1 \times 5/33$ سانتی‌متر مربع، توسط یک صفحه نازک بر روی بلندگو قرار گرفته و کل سیستم تراز شده است. سیال مورد استفاده آب سه‌بار تقطیر بوده است که سطح سیال بایک لایه کشسان از جنس سیلیکون (محافظ صفحه کلید لپ‌تاپ) با ضخامت $0/24917$ میلی‌متر، به خوبی پوشانده شده است. به شکلی که لایه کشسان به راحتی بر روی سطح شناور باشد. در این کار دامنه آستانه لازم برای تشکیل امواج فارادی با استفاده از تکنیک ماره [۷] اندازه‌گیری شده است. برای این منظور از دو توری مشابه با گام $0/1$ میلی‌متر استفاده شد. یکی از توری‌ها توسط یک قاب مستطیلی به دیواره‌ی جانبی ظرف چسبانده شد و توری دوم در فاصله‌ی نزدیک به توری اول و به موازات آن بر روی قاب دیگری نصب شد. با قرار گرفتن این دو توری در مجاورت هم فریزهای ماره شکل گرفتند. با اعمال جابجایی‌های اندک به ظرف سیال، توری متصل به آن هم جابجا شد. در نتیجه فریزهای ماره در راستای عمود بر جهت ارتعاش ظرف جابه‌جا شدند. زمانی که دامنه نوسان به یک مقدار آستانه رسید و امواج فارادی شکل گرفتند، از جابه‌جایی فریزهای ماره توسط دوربین سریع (pco.1200hs) با سرعت 560 فریم بر ثانیه فیلم گرفته شد. با دنبال کردن رد فریزهای ماره با نرم‌افزار MATLAB و با استفاده از رابطه $\delta d = \frac{d}{d_m} \delta d_m$ جابجایی نسبی دو توری و در نتیجه دامنه آستانه تعیین شد. d گام توری، d_m گام فریز ماره، δd_m جابجایی فریز ماره و δd جابجایی نسبی دو توری را نشان می‌دهند. در شکل‌های ۱ و ۲ نتایج مربوط به اندازه‌گیری دامنه آستانه لازم برای تشکیل امواج فارادی و همچنین شکل شماتیک از چیدمان آزمایش مورد استفاده را می‌توان دید.

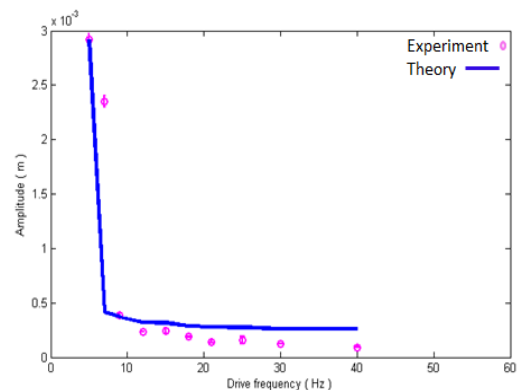
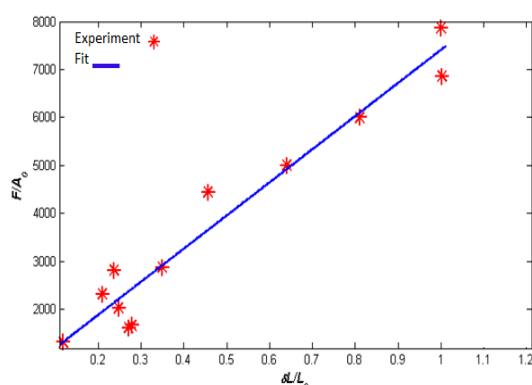
۲-۲- اندازه‌گیری مدول یانگ (ضریب کشسانی) صفحه کشسان

با توجه به حضور لایه کشسان روی سطح آب، یکی از جملات انرژی پتانسیل سیستم شامل انرژی پتانسیل خمشی است. برای محاسبه این پارامتر بایستی ضریب کشسانی صفحه کشسان را به دست آوریم. آزمایشی به این منظور طراحی کردیم که بدین صورت که یک نوار باریک از این لایه کشسان را بردیم، به طوری که طول آن در یک راستا به قدری کوچک باشد که تغییرات طول را فقط در راستایی که نیرو به آن وارد می‌شود داشته باشیم. این نوار باریک را به وسیله یک گیره ثابت به صورت عمودی از یک نقطه آویزان می‌کنیم. ابتدا از موقعیت اولیه نوار به وسیله دوربین عکاسی Canon عکس گرفته می‌شود. از انتهای دیگر نوار بریده شده وزنه‌هایی به جرم‌های مختلف در یک محدوده‌ی معلوم به آن متصل می‌کنیم. در نتیجه در راستای اعمال این نیرو نوار کشیده شده و تغییر طول خواهد داشت. یک بار دیگر از موقعیت ثانویه نوار بعد از اعمال وزنه به وسیله دوربین عکس گرفته می‌شود. در نهایت پس از اعمال تمام وزنه‌ها به نوار و ثبت تغییر طول‌های مربوط به آن‌ها از طریق عکس گرفتن، با استفاده از نرم‌افزار ImageJ مقدار تغییر طول مربوط به اعمال هر نیرو را با دقتی از مرتبه یک پیکسل به دست

می‌آوریم. شکل ۲ مقادیر به دست آمده از این آزمایش را نشان می‌دهد. شیب این نمودار مقدار مدول یانگ مربوط به لایه سیلیکونی را به دست می‌دهد. این مقدار با برازش یک خط بر نقاط به دست آمده به صورت $E=6/919$ کیلو پاسکال به دست آمده است.



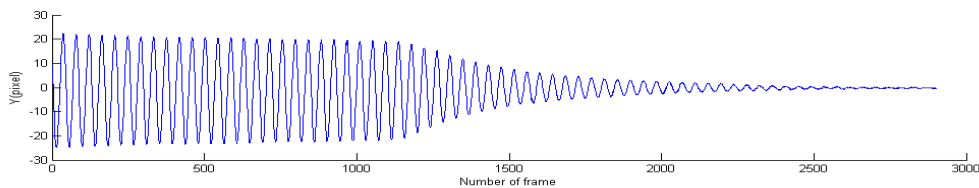
شکل ۱: (شکل راست) نمودار دامنه آستانه به دست آمده از روش ماره بر حسب بسامد اعمالی در یک ظرف مستطیلی در ابعاد $33/5 \times 14/1$ سانتی متر مربع و ارتفاع آب $1/5$ سانتی متر، در حضور و در غیاب لایه کشسان شناور. (شکل چپ) شمایی از چیدمان آزمایش اندازه‌گیری دامنه آستانه با استفاده از روش ماره.



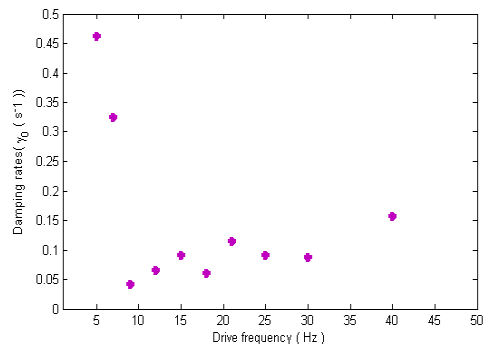
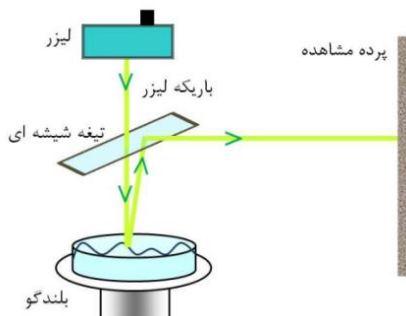
شکل ۲: (شکل راست) نمودار دامنه آستانه بر حسب بسامد اعمالی در ابعاد $33/5 \times 14/1$ سانتی متر مربع و ارتفاع آب $1/5$ سانتی متر، در حضور لایه کشسان شناور، نقاط مربوط به مقادیر به دست آمده از تکنیک ماره و منحنی پیوسته مربوط به رابطه تئوری می‌باشد. (شکل چپ) نمودار مربوط به مقادیر به دست آمده از آزمایش اندازه‌گیری مدول یانگ می‌باشد. ضریب کشسانی صفحه، با برازش یک خط بر نقاط به دست آمده به صورت $E=6/919$ کیلو پاسکال شده است.

۲-۳- اندازه‌گیری نرخ میرایی امواج سطحی

برای اندازه‌گیری نرخ تضعیف امواج، از تصویر بازتابیده‌ی باریکه لیزر از سطح سیال بر روی یک پرده عمودی، توسط دوربین CASIO فیلم گرفته شد. بدین شکل که پس از تشکیل امواج فارادی، نوسان ساز را خاموش کرده و از تصویر باریکه در حین میرا شدن امواج سطحی، فیلم گرفته شد. در نهایت با دنبال کردن تصویر رد باریکه لیزر بر روی پرده عمودی توسط نرم افزار MATLAB، تصویری از جابجایی باریکه را مانند شکل ۳ به دست آوردیم. سپس با انجام برازشی مناسب بر این نمودار مقدار ضریب تضعیف این امواج را به دست آوردیم. در شکل ۴ نمودار مربوط به مقادیر ضرایب تضعیف به دست آمده از آزمایش بر حسب بسامد اعمالی و همچنین شکل شماتیک از چیدمان آزمایش مورد استفاده برای اندازه‌گیری ضریب تضعیف امواج سطحی را می‌توان دید.



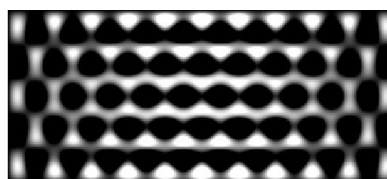
شکل ۳: جابجایی رد باریکه لیزر بر روی پرده عمودی در بسامد ۱۲ هرتز.



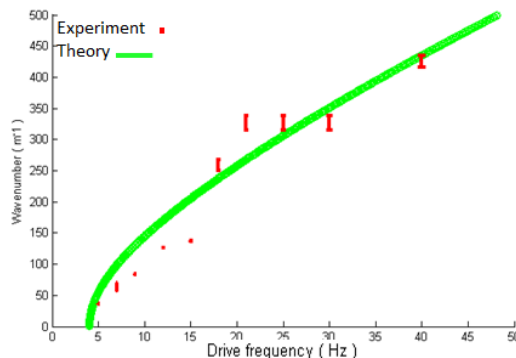
شکل ۴: (شکل راست) نمودار مربوط به مقادیر ضرایب تضعیف به دست آمده از آزمایش بر حسب بسامد اعمالی. (شکل چپ) شکل شماتیک از چیدمان آزمایش مورد استفاده برای اندازه‌گیری ضریب تضعیف امواج سطحی می‌باشد.

۲-۴- اندازه‌گیری عدد موج امواج سطحی

برای اندازه‌گیری عدد موج مربوط به مدهای تحریک شده از طرح‌های مشاهده شده به کمک استروبو اسکوپ، به وسیله دوربین Canon عکس گرفته شده و با روش تبدیل فوریه عدد موج طرح‌ها را به دست آوردیم. طرح‌های تشکیل شده بر روی سطح سیال را می‌توان طبق مدهای نرمال ظرف تحلیل کرد. مدهای خطی در یک ظرف مستطیلی با شرط $\xi = 0$ در مرزها با رابطه $\xi(x, y) = \xi_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$ مشخص می‌شوند. اگر یک مد را با (n, m) نشان دهیم، عدد موج متناظر با آن مد برای یک ظرف مستطیلی به شکل $k_{nm}^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$ می‌باشد. برای یک بردار موج k هر یک از مدهای (n, m) که نرخ تضعیف کمتری داشته باشند سریعتر رشد کرده و طرح مشاهده شده مربوط به این مد تنها یا برهم‌نهی از دو مد (n, m) و (m, n) می‌باشد [8]. در شکل ۵ نمونه‌ای از طرح‌های تشکیل شده را می‌توان مشاهده کرد. شکل ۶ مقادیر عدد موج امواج تشکیل شده بر حسب بسامد اعمالی را نشان می‌دهد.



شکل ۵: (شکل چپ) طرح مشاهده شده در بسامد ۴۰ هرتز در ظرفی مستطیلی با عمق ۱/۵ سانتی‌متر در حضور لایه کشسان. (شکل راست) طرح شبیه‌سازی شده متناظر با آن در نرم‌افزار MATLAB.



شکل ۶: عدد موج امواج فارادی برحسب بسامد اعمالی در حضور لایه کشسان، نقاط مربوط به نتایج تجربی و خط پیوسته نتایج تئوری را نشان می‌دهند.

۳- نتیجه‌گیری

در این آزمایش برای نخستین بار دامنه آستانه لازم برای تشکیل امواج فارادی در حضور یک لایه جامد کشسان شناور، از طریق تئوری و تجربی مورد بررسی قرار گرفت. همان‌طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود توافق خوبی میان نتایج تئوری (منحنی پیوسته در شکل) با نتایج تجربی (نقاط گسسته) برای دامنه آستانه مشاهده می‌شود. به همین ترتیب می‌توان این توافق را در شکل ۶ برای نتایج حاصل از آزمایش اندازه‌گیری عدد موج مربوط به این امواج و رابطه پخش به دست آمده مشاهده نمود.

مراجع

- [1] M. Faraday, P. Trans, *R. Soc. London*, **121** (1831) 319.
- [2] T. B. Benjamin, F. Ursell, *Proc. R. Soc. Lond*, **A225** (1994) 505.
- [3] K. Kumer, L. S. Tuckerman, *Fluid Mech*, **279** (1994) 49.
- [4] D. M. Henderson, J. W. Miles, *Fluid Mech*, **213** (1990) 95-109.
- [5] J. W. Miles, *Fluid Mech*, **75** (1976) 419-448.
- [6] J. W. Miles, *Fluid Mech*, **146** (1984) 285-302.
- [7] رسولی، سیف‌الله؛ پایان‌نامه کارشناسی ارشد (۱۳۷۶)
- [8] S. Douaday, S. Fauve, *Europhys. Let.*, **6(3)** (1998) 221-22.